Лекция 10. Шегерімдер

Жоспар:

1. Анықтама
2. Шегерім туралы жалпыланған теорема
3. Шексіз алыс нүктеде шегерімді есептеу формулалары
4. Мысалдар

Анықтама. $f(z)$ функциясының $z = z_0$ оқшауланған ерекше нүктедегі шегерімі деп (белгіленуі $res\ f(z_0)$ немесе $\underset{z=z_0}{res}\ f(z)$) келесі интегралды айтады:

$$\underset{z=z_0}{res}\ f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz \tag{16.1}$$

мұнда $\gamma: 0 < |z - z_0| < \rho$, ($res$ – residu (фр.) – шегеру, алу), контурды айналу оң бағытта, сағат бағытына қарсы.

Егер Лоран қатарындағы c_n коэффициенттерін табу формуласын еске түсірсек,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz$$

онда $n = -1$ болғанда

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz$$

Тұжырым. z_0 оқшауланған ерекше нүктедегі $f(z)$ функциясының шегерімі, осы функцияның z_0 нүктесінің аймағында Лоран қатарына жіктелуіндегі c_{-1} коэффициентіне тең, демек

$$\underset{z=z_0}{res}\ f(z) = c_{-1},\ \ z_0 \in D \tag{16.2}$$

Тұжырым.1. Егер z_0 ерекше нүктесі $f(z)$ функциясының жөнделетін ерекше нүктесі болса, онда

$$\underset{z=z_0}{res}\ f(z) = 0,\ \ z_0 \in D \tag{16.3}$$

2. Егер z_0 ерекше нүктесі $f(z)$ функциясының $n-$ ретті полюсі болса, онда

$$\underset{z=z_0}{res}\ f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(f(z)(z - z_0)^n),\ \ z_0 \in D \tag{16.4}$$

3. Егер z_0 ерекшенүктесі $f(z)$ функциясының 1-ретті (жай) полюсі болса, онда

$$\underset{z=z_0}{res}\ f(z) = \lim_{z\to z_0}(f(z)(z - z_0)),\ \ z_0 \in D \tag{16.5}$$

4. Егер z_0 ерекше нүктесі $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ функциясының 1-ретті полюсі болса, мұнда $\varphi(z), \psi(z) -$ функциялары z_0 нүктесінде аналитикалық, $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, онда

$$\underset{z=z_0}{res}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \tag{16.6}$$

Шексіз алыс нүктедегі функцияның шегерімі

Егер $\varphi(\zeta) = f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ функциясы $\zeta = 0$ нүктесінде аналитикалық болса, онда $f(z)$ функциясы $z = \infty$ шексіз алыс нүктеде аналитикалық деп аталады.

Мысалы, $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ функциясы $z=\infty$ нүктесінде аналитикалық, себебі $\varphi(\zeta)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\sin\zeta$ функциясы $\zeta=0$ нүктесінде аналитикалық.

$z_0=\infty$ нүктесінің кейбір аймағында $f(z)$ функциясының басқа ерекше нүктелері болмаса, онда z_0 нүктесі оқшауланған ерекше нүкте деп аталады.

$f(z)=\frac{1}{\sin z}$ функциясының шексіздікте оқшауланған ерекшелігі бар, себебі, егер $k\to\infty$, онда $z_k=k\pi$ полюстері шексіздікке жиналады.

Жоғарыда айтылған секілді, егер $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ шегі ақырлы, шексіздікке ұмтылса немесе табылмаса, онда соған сәйкес $z=\infty$ нүктесі жөнделетін ерекше нүкте, полюс немесе маңызды ерекше нүкте деп аталады.

Шексіздікте Лоран жіктелуінің критерийі өзгереді.

Тұжырым. Егер $z=\infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының жөнделетін ерекше нүктесі болса, онда $f(z)$ функциясының осы нүктенің аймағында Лоран қатарына жіктелуінде z – тің оң дәрежелі мүшелері болмайды; егер $z=\infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының полюсі болса, онда Лоран жіктелуінде z – тің оң дәрежелімүшелерінің саны ақырлы, ал маңызды ерекше нүкте болған жағдайда, z -тің оң дәрежелі мүшелерінің саны шексіз көп.

$f(z)$ функциясы $z=\infty$ нүктесінің аймағында аналитикалық болсын ($z=\infty$ нүктесінде болмауы мүмкін) $f(z)$ функциясының шексіздіктегі шегерімі деп

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma^-} f(z)dz,\quad \gamma:\rho<|z-z_0|<\infty$$

Бұл жағдайда γ контурын сағат бағытымен айналады.

(16.2) – формуласын ескерсек, онда

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=-c_{-1} \tag{16.7}$$

Шексіз алыс нүктеде шегерімді есептеу формулалары

1) Егер $f(z)$ функциясы $z=\infty$ нүктесіндеаналитикалық болса, онда

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=\lim_{z\to\infty}[z(f(\infty)-f(z))] \tag{16.8}$$

Егер $f(\infty)=0$, онда (16.8) – формуладан:

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=\lim_{z\to\infty}(-z\cdot f(z)) \tag{16.9}$$

2) Егер $z=\infty$ нүктесі $f(z)$ – функциясының k – ретті нөлі болса, онда

$$f(z)\sim\frac{A}{z^k},\ \text{егер}\ z\to\infty,\ \ A\neq 0$$

Бұл асимптотикалық формулада $k=1$ болса, онда

$$f(z)\sim\frac{A}{z},$$

Олай болса,

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=-A \tag{16.10}$$

ал егер $k \geq 2$ болса, онда

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = 0 \qquad (16.11)$$

3) Егер $f(z)$ функциясы $f(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ түрінде жазылса, мұнда $\varphi(\zeta)$ функциясы $\zeta = 0$ нүктесінде аналитикалық болса, онда

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = -\varphi'(0) \qquad (16.12)$$

Тұжырым. (Шегерім туралы жалпыланған теорема).

$f(z)$ функциясының шексіз алыс нүктені қоса есептегенде, барлық ерекше нүктелеріндегі шегерімдерінің қосындысы нөлге тең:

$$\sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res}\, f(z) + \underset{z=\infty}{res}\, f(z) = 0 \qquad (16.13)$$

мұнда $z_1, z_2, ..., z_n -$ $f(z)$ функциясының ерекше нүктелері.

1-мысал. $f(z) = \frac{(3z+1)e^z}{4z^2 - z - 5}$ функциясының $z_0 = -1$ нүктесіндегі шегерімін есептеңіз.

Шешуі. Бөлшектің бөліміндегі өрнектің түбірін табайық.

$$4z^2 - z - 5 = 0 \Rightarrow z_1 = -1,\ z_2 = \frac{5}{4}$$

Онда

$$f(z) = \frac{(3z+1)e^z}{4(z+1)\left(z - \frac{5}{4}\right)} = \frac{(3z+1)e^z}{(z+1)(4z-5)}$$

$z = -1$ нүктесі берілген функцияның бірінші ретті полюсі болады.

$f(z)$ функциясын келесі түрде жазайық

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z+1},$$

мұнда $\varphi(z) = \frac{(3z+1)e^z}{4z-5}$

(16.5) – формуласы бойынша берілген есептің жауабын аламыз.

$$\underset{z=-1}{res}\, f(z) = \lim_{z\to-1} f(z)(z+1) = \lim_{z\to-1} \varphi(z) = \lim_{z\to-1} \frac{(3z+1)e^z}{4z-5} = \frac{2}{9e};$$

2-мысал. $f(z) = \frac{3z+1}{(z-1)^2(z+4)}$ функциясының ерекше нүктелердегі шегерімін есептеңіз.

Шешуі. Берілген функцияның ерекше нүктелері $z = 1$ және $z = -4$ екенін байқау қиын емес. Мұнда $z = 1$ екінші ретті полюс, ал $z = -4$ бірінші ретті полюс. (16.4) және (16.5) формулалары бойынша

$$\underset{z=1}{res}\, f(z) = \lim_{z\to1}(f(z)\cdot(z-1)^2)' = \lim_{z\to1} = \left(\frac{3z+1}{z+4}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to1} \frac{3(z+4) - (3z+1)}{(z+4)^2} = \frac{11}{25}$$

$$\underset{z=-4}{res} f(z) = \lim_{z\to-4} f(z)(z+4) = \lim_{z\to-4}\frac{3z+1}{(z-1)^2} = -\frac{11}{25}$$

Жауабы: $\underset{z=1}{res} f(z) = \frac{11}{25}, \quad \underset{z=-4}{res} f(z) = -\frac{11}{25}$

3-мысал. $f(z) = e^{2z}\cdot\sin\frac{1}{z}$ функциясының $z_0 = 0$ ерекше нүктесіндегі шегерімін есептеңіз.

Шешуі. $z_0 = 0$ ерекше нүктесінің түрін анықтау үшін берілген функцияны осы нүктенің аймағында Лоран қатарына жіктейік.

$$f(z) = \left(1 + 2z + \frac{2^2z^2}{2!} + \frac{2^3z^3}{3!} + \frac{2^4z^4}{4!} + \ldots\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \ldots\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{2^2}{2!3!} + \frac{2^4}{4!5!} - \ldots\right)\frac{1}{z} + \left(-\frac{2}{3!} + \frac{8}{3!5!} - \ldots\right)\frac{1}{z^2} + \ldots =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n)!(2n+1)!}\right)\frac{1}{z} + c_{-2}\cdot\frac{1}{z^2} + \ldots + \text{дұрыс бөлігі};$$

Лоран қатарының бас бөлігінің шексіз көп мүшелері бар, олай болса, $z_0 = 0$ нүктесі маңызды ерекше нүкте.

(16.2) – формула бойынша берілген есептің жауабы шығады:

$$\underset{z=0}{res}\left(e^{2z}\cdot\sin\frac{1}{z}\right) = c_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n)!(2n+1)!}$$

4-мысал. $f(z) = \frac{2}{z^2-9}\cos\frac{z+1}{z+2}$ функциясының ерекше нүктелеріндегі шегерімін есептеңіз.

Шешуі. Берілген функция үшін $z = 3,\ z = -3$ – бірінші ретті полюстер, ал $z = -2$ маңызды ерекше нүкте.

(16.5) – формуласы бойынша

$$\underset{z=3}{res} f(z) = \lim_{z\to3} f(z)\cdot(z-3) = \lim_{z\to3}\frac{2}{z+3}\cos\frac{z+1}{z+2} = \frac{1}{3}\cos\frac{4}{5}$$

$$\underset{z=-3}{res} f(z) = \lim_{z\to-3} f(z)\cdot(z+3) = \lim_{z\to-3}\frac{2}{z-3}\cos\frac{z+1}{z+2} = -\frac{1}{3}\cos 2$$

$f(z)$ функциясы шексіздікте аналитикалық (2-ретті нөл), себебі

$$\lim_{z\to\infty}\frac{2}{z^2-9}\cos\frac{z+1}{z+2} = \left(\frac{\cos 1}{\infty}\right) = 0,$$

$$f(z) \sim \frac{2}{z^2},\ k = 2$$

Олай болса, (16.11) формуласы бойынша

$$\underset{z=\infty}{res} f(z) = 0$$

(16.13) – формуласын ескерсек,

$$\underset{z=3}{res} f(z) + \underset{z=-3}{res} f(z) + \underset{z=-2}{res} f(z) + \underset{z=\infty}{res} f(z) = 0$$

Олай болса

$$\underset{z=-2}{res} f(z) = -(\underset{z=3}{res} f(z) + \underset{z=-3}{res} f(z) + \underset{z=\infty}{res} f(z)) = \frac{1}{3}\cos 2 - \frac{1}{3}\cos\frac{4}{5}.$$

Жауабы: $\underset{z=3}{res} f(z) = \frac{1}{3}\cos\frac{4}{5}$, $\underset{z=-3}{res} f(z) = -\frac{1}{3}\cos 2$, $\underset{z=-2}{res} f(z) = \frac{1}{3}\cos 2 - \frac{1}{3}\cos\frac{4}{5}$.

5-мысал. $f(z) = \frac{\cos \pi z}{z^3(z-2)}$ функциясының $z=0$ және $z=2$ ерекше нүктелердегі шегерімін есептеңіз.

Шешуі. Берілген функция үшін $z=0$ нүктесіүшінші ретті, ал $z=2$ нүктесі бірінші ретті полюстер. (16.4) және (16.5) формулалары бойынша,

$$\underset{z=0}{res} f(z) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}(f(z)\cdot z^3)'' = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{\cos \pi z}{z-2}\right)'' =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{-\pi\sin \pi z\cdot(z-2)-\cos \pi z}{(z-2)^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{-\pi^2\cos\pi z\cdot(z-2)^3-(-\pi\sin\pi z\cdot(z-2)-\cos\pi z)\cdot 2(z-2)}{(z-2)^4} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8\pi^2-4}{16}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{8}$$

$$\underset{z=2}{res} f(z) = \lim_{z\to 2} f(z)\cdot(z-2) = \lim_{z\to 2}\frac{\cos \pi z}{z^3} = \frac{1}{8};$$

Жауабы: $\underset{z=0}{res} f(z) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{8}$; $\underset{z=2}{res} f(z) = \frac{1}{8}$;

6-мысал. $P_n(z)$ және $Q_n(z)$ көпмүшеліктері берілсін.

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n,$$
$$Q_n(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_{n-1}z + b_n,$$

мұнда $a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0$. Егер $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ болса, онда $\underset{z=\infty}{res} f(z)$ табыңыз.

Шешуі. $f(z)$ функциясы $z=\infty$ нүктесінде аналитикалық. Шегерімді табу үшін (16.8) формуласын қолданамыз, мұнда $f(\infty) = \frac{a_0}{b_0}$. Олай болса,

$$z(f(\infty) - f(z)) = z\left(\frac{a_0}{b_0} - \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_{n-1}z + b_n}\right) =$$

$$= \frac{(a_0 b_1 - a_1 b_0)z^n - (a_0 b_2 - a_2 b_0)z^{n-1} + \ldots}{b_0^2 z^n + b_0 b_1 z^{n-1} + \ldots} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_0^2} + h(z),$$

мұнда $z\to\infty$ ұмтылғанда $h(z)\to 0$. Демек, жауабы:

$$\underset{z=\infty}{res} f(z) = \lim_{z\to\infty}[z(f(\infty)-f(z))] = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_0^2}$$

7-мысал. $f(z) = \frac{(z^{10}+1)\cos\frac{1}{z}}{(z^5+2)(z^6-1)}$ функциясының шексіздіктегі шегерімін есептеңіз.

Шешуі. $f(z)$ функциясын $f(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ түрінде жазайық.

$$\varphi\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^{11}}\right)\cos\frac{1}{z}}{1+\frac{2}{z^5}-\frac{1}{z^6}-\frac{2}{z^{11}}};$$

$\frac{1}{z}=\zeta$ деп белгілесек, онда $\varphi(\zeta)=\frac{(\zeta+\zeta^{11})\cos\zeta}{1+2\zeta^5-\zeta^6-2\zeta^{11}}$ функциясы $\zeta=0$ нүктесінде аналитикалық. Олай болса, (16.12) – формуласы бойынша

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=-\left(\frac{(\zeta+\zeta^{11})\cos\zeta}{1+2\zeta^5-\zeta^6-2\zeta^{11}}\right)'\Bigg|_{\zeta=0}=$$

$$=-\left[\frac{(1+11\zeta^{10})(1+2\zeta^5-\zeta^6-2\zeta^{11})-(\zeta+\zeta^{11})(10\zeta^4-6\zeta^5-22\zeta^{10})}{(1+2\zeta^5-\zeta^6-2\zeta^{11})^2}\cdot\cos\zeta\right.$$

$$\left.-\frac{(\zeta+\zeta^{11})}{(1+2\zeta^5-\zeta^6-2\zeta^{11})}\cdot\sin\zeta\right]\Bigg|_{\zeta=0}=-1.$$

Демек, жауабы: $\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=-1.$

Пайдаланылған әдебиеттер:

1. Төлегенова М. Б., Қойлышев У.Қ. Комплекс айнымалы функциялар теориясы және Амалдық есептеу. Оқу құралы. Қазақ ун-ті, 2021. Қазақша, орысша, ағылшынша.
2. Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1991 (предыдущие издания 1965, 1967).
3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. М.: Наука, 1985. (Предыдущие издания: 1968, 1976).
4. Сборник задач по теории аналитических функций. Под ред. М.А. Евграфова. Изд. 2-е доп. М.: Наука,1972.
5. Кангужин Б.Е. Теория функций комплексного переменного. Алматы. Қазақ университеті, 2007.